RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Per contribuire ad arginare più rapidamente la pandemia in corso, le principali 25 aziende farmaceutiche della *Confederazione degli Imperi Chaotici* hanno offerto al colosso farmaceutico multimperiale *CheeryPills* la disponibilità dei propri stabilimenti per produrre il suo efficace vaccino. Nel contratto con la confederazione il colosso si è impegnato a fornire almeno D_h dosi a fronte di R_h denari per ciascun mese h del piano vaccinale, che si articola in 24 mesi. A ciascuna azienda è stato chiesto di avanzare le proprie richieste economiche e garantire conseguenti livelli di produzione: l'azienda i richiede un finanziamento di f_i denari per avviare la produzione e c_{ih} denari a dose nel mese h del piano, per il quale garantisce fino a d_{ih} dosi. Da parte sua, negli stessi mesi, CheeryPills è in grado di produrre autonomamente nei propri stabilimenti fino a m_h dosi al costo di c_h denari ciascuna.

Aiuta il colosso multimperiale a predisporre il suo piano di forniture, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quanti dosi produrre, quali aziende coinvolgere e quante dosi acquistare da ciascuna in ogni mese del piano nel rispetto delle capacità produttive e delle richieste della confederazione in modo da massimizzare il proprio profitto.

Scelte le famiglie di variabili

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'azienda } i \text{ viene selezionata,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ih} = \text{ numero di dosi acquistate dall'azienda } i \text{ nel mese } h, \qquad i = 1, \dots, 25, \;\; h = 1, \dots, 24$$

$$y_h = \text{ numero di dosi prodotte nei propri stabilimenti nel mese } h,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\max$$

$$y_h \le m_h \qquad h = 1, \dots, 24$$

$$x_{ih}, y_h \in \mathbb{Z}_+, \;\; z_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, 25, \;\; h = 1, \dots, 24.$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{h=1}^{24} \Big(R_h - c_h y_h - \sum_{i=1}^{25} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) \Big)$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

B $\sum_{h=1}^{24} \Big(R_h - c_h y_h - \sum_{i=1}^{25} c_{ih} x_{ih} \Big) - \sum_{i=1}^{25} f_i z_i$ (funzione obiettivo) — aggiungere

C $\sum_{h=1}^{24} \Big((R_h - c_h) y_h - \sum_{i=1}^{25} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) \Big)$ (funzione obiettivo) — non aggiungere

D $x_{ih} \le d_{ih} z_i \quad i = 1, \dots, 25, \; h = 1, \dots, 24$ — aggiungere

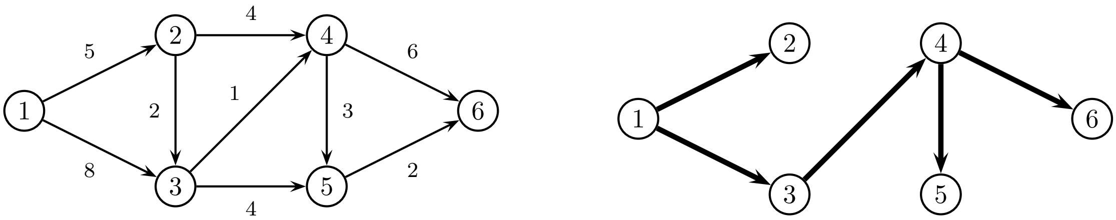
E $y_h + x_{ih} \le m_h + d_{ih} \quad i = 1, \dots, 25, \; h = 1, \dots, 24$ — non aggiungere

F $\sum_{k=1}^{h} \Big(y_k + \sum_{i=1}^{25} x_{ik} \Big) \ge \sum_{k=1}^{h} D_k \quad h = 1, \dots, 24$ — aggiungere

G $y_h + x_{ih} \ge D_h \quad i = 1, \dots, 25, \; h = 1, \dots, 24$ — non aggiungere

H $y_h + \sum_{i=1}^{25} x_{ih} z_i \ge D_h \quad h = 1, \dots, 24$ — non aggiungere

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A $d = (0, 5, 7, 9, 12, 14)$ è il vettore delle etichette relative all'albero — falso

B Il costo dell'albero è 23 — falso

b) Quale coppia di archi non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $(2, 3), (2, 4)$ II $(2, 4), (3, 5)$ III $(2, 3), (5, 6)$

c) Quali archi bisogna sostituire nell'albero con quelli scelti al punto b) per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(1, 3), (4, 6)$ II $(3, 4), (4, 5)$ III $(1, 3), (3, 4)$

d) Qual è il costo del cammino minimo dalla radice al nodo 6?

I 15 II 12 III 13

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta

$c_{13} \leq 7$ e $c_{46} \leq 5$, indipensabili rispettivamente affinché $(2, 3)$ e $(5, 6)$ soddisfino le condizioni di Bellman

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcl} \max & \alpha x_1 & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha < 0$, allora (P) è inferiormente illimitato — falso

B $\bar{x} = (2, 3)$ e $\bar{y} = (0, 0, 0, \alpha, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari — vero

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(2, 1)\}$ II $\{(t, 2) : 0 \leq t \leq 1\}$ III $\{(2, 3)\}$

c) Se $\alpha = 4$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{(t, t, 0, 2(2-t), 0) : 0 \leq t \leq 2\}$ II (D) è inferiormente illimitato III $\{(0, 0, 0, 4, 0)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

I $\{(0, 0)\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 2\xi_2 \leq \xi_1 \leq \xi_2\}$ III $\emptyset$

e) Scegliere una funzione obiettivo per (P) in modo tale che $x = (1, 0)$ sia una soluzione ottima. Giustificare la risposta.

$\boxed{c = (1, -1)\text{: } x \text{ e la soluzione duale ammissibile } y = ((0, 1, 0, 0, 0) \text{ soddisfano gli scarti complementari}}$

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{lrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & & & \le & -1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & & & x_2 & \le & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 5 \\ & x_1 & & & \le & 3 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min & -y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & + & 5y_4 & + & 3y_5 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & + & y_5 & = & 2 \\ & & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \ge & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (1, 0)$ è una soluzione di base — falso

B La direzione $\xi = (0, 1)$ è una direzione ammissibile per $x = (1, 0)$ — vero

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\bar{x} = (3, 0)$, $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 2)$ II $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (-3, 1, 0, 0, 0)$ III $\bar{x} = (3, 3)$, $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 2)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1, 1)$, $\bar{\lambda} = 1$ II $\xi = (0, -1)$, $\bar{\lambda} = 2$ III $\xi = (1, 1)$, $\bar{\lambda} = 2$

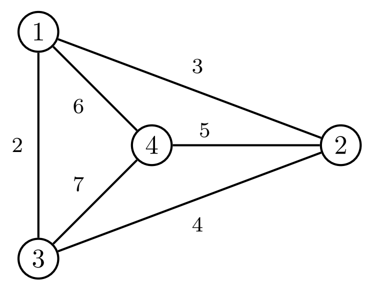
d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (2, 3)$, $\bar{y} = (0, -1, 1, 1, 0)$ II $\bar{x} = (3, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 1)$ III $\bar{x} = (3, 2)$, $\bar{y} = (0, 1, 0, 0, 3)$

e) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale (P) in modo tale che $\bar{x}$ individuato al punto precedente sia l'unica soluzione ottima e la soluzione ottima del problema duale (D) sia degenere. Giustificare la scelta effettuata.

$\boxed{c = (1, 0)\text{: } (3, 2) \text{ rimane ottima ma l'unica soluzione ottima del duale } y = (0, 0, 0, 0, 1) \text{ è degenere}}$

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1, 2)$ appartiene al ciclo hamiltoniano individuato dall'algoritmo del nodo più vicino a partire da 1 — falso

B L'1-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{12} = 1$ è un ciclo hamiltoniano falso

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 14, v_S = 20$ II $v_I = 16, v_S = 17$ III $v_I = 14, v_S = 17$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per otttimalità ($v_I \geq v_S$) II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_{13}, x_{12} II 3: x_{13}, x_{12}, x_{23} III 4: x_{13}, x_{12}, x_{23}, x_{24}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.

$c_{14} = 1$: la soluzione ammissibile di partenza coincide con l'1-albero di costo minimo

esistono altre scelte corrette